

Проверка гипотез

1°. Гипотезы. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — выборка с распределением $F(X, \theta)$, где $\theta \in \Theta \subset \mathbf{R}$.

Одной из задач математической статистики является задача проверки гипотезы об истинном значении неизвестного параметра.

Гипотезой называется любое подмножество множества Θ всех возможных значений неизвестного параметра. Мы будем рассматривать две гипотезы

$$\begin{aligned} \Theta_0 &\rightarrow H_0 : \theta \in \Theta_0 - \text{основная гипотеза} \\ \Theta_1 &\rightarrow H_1 : \theta \in \Theta_1 - \text{альтернатива} \end{aligned}, \quad \Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset.$$

Гипотеза называется *простой*, если она состоит из одной точки и *сложной* в противном случае. Задача проверки гипотезы заключается в построении правила, по которому для каждого набора наблюдений принимается одна из двух гипотез (основная или альтернативная). Мы будем формулировать это правило с помощью критической функции $\varphi(x) = \varphi(x_1, \dots, x_n)$, которая определяется как вероятность того, что будет отвергнута основная гипотеза, если наблюдения приняли значения $x_1, \dots, x_n$. Указанное правило нуждается в более подробном объяснении. Если при данных наблюдениях критическая функция равна 1, то отвергается основная гипотеза и принимается альтернативная. Если критическая функция равна 0, то принимается основная гипотеза. Если критическая функция принимает значение $0 < \varphi < 1$, то для принятия решения необходимо произвести дополнительный случайный эксперимент (не связанный с наблюдаемой случайной величиной) с двумя исходами, имеющими вероятности φ и $1 - \varphi$. Если осуществится исход, имеющий вероятность φ , то основная гипотеза отвергается, в противном случае — принимается. Если критерий не принимает иных значений, кроме 0 и 1, то он называется *нерандомизированным*, если же критерий хотя бы в одной точке принимает значение, лежащее строго между нулём и единицей, то он называется *рандомизированным*. Необходимость рандомизированных критериев связана с необходимостью точного решения оптимизационной задачи, которая будет сформулирована ниже.

При любом выборе критической функции (в силу случайности результатов наблюдения) возможны ошибки при принятии решения.

Ошибка первого рода заключается в том, что основная гипотеза H_0 отвергается, в то время как она верна, *ошибка второго рода* — H_0 принимается, в то время как она неверна. Исходя из определения критической функции (критерия), вероятностью ошибки первого рода является математическое ожидание $\mathbf{E}_\theta \varphi(X) = \alpha(\theta)$, $\theta \in \Theta_0$. *Функцией мощности* называется $\beta(\theta) = \mathbf{E}_\theta \varphi(X)$, $\theta \in \Theta_1$ — вероятность принятия правильного решения в случае справедливости альтернативной гипотезы. Из определения следует, что вероятность ошибки второго рода равна $1 - \beta(\theta)$.

Размером критерия называется наибольшая вероятность ошибки первого рода:

$$\max_{\theta \in \Theta_0} \alpha(\theta) = \alpha.$$

Будем выбирать критерии так, чтобы при фиксированном α достичь $\max \beta(\theta)$.

Критерий $\varphi(X)$ называется *равномерно наиболее мощным критерием размерности α* , если

1. $\max_{\theta \in \Theta_0} \mathbf{E}_\theta \varphi(X) = \alpha$ и

2. для любого критерия φ^* размерности α и для любого $\theta \in \Theta_1 \Rightarrow \mathbf{E}_\theta \varphi(X) \geq \mathbf{E}_\theta \varphi^*(X)$.

2°. Лемма Неймана-Пирсона.

Лемма [Ю. Нейман, Э. С. Пирсон]. Пусть выборка $X_1, \dots, X_n$ имеет функцию распределения $F(X, \theta)$, где $\theta \in \Theta \subset \mathbf{R}$ и функцию правдоподобия $L(X, \theta)$. Введём класс Φ

критических функций: относительно двух простых гипотез $H_0: \theta = \theta_0, H_1: \theta = \theta_1 \neq \theta_0, 0 < \alpha < 1$, где α — заданный размер критерия, K_α — некоторое значение:

$$\Phi = \left\{ \varphi : \varphi(X) = \begin{cases} 1, & \frac{L(X, \theta_1)}{L(X, \theta_0)} > K_\alpha, \\ 0, & \frac{L(X, \theta_1)}{L(X, \theta_0)} \leq K_\alpha. \end{cases} \right\}$$

Отметим, что класс включает в себя все функции, удовлетворяющие указанным условиям и принимающие при $\frac{L(X, \theta_1)}{L(X, \theta_0)} = K_\alpha$ любые значения. Отметим также, что для разных

значений K_α соответствующие классы Φ будут, вообще говоря, разными. Тогда:

1. $\forall 0 < \alpha < 1 \Rightarrow \exists \varphi \in \Phi : \mathbf{E}_{\theta_0} \varphi(X) = \alpha$ (Существует критерий любого размера).
2. Если $\varphi \in \Phi$ и $\mathbf{E}_{\theta_0} \varphi(X) = \alpha$, то φ — наиболее мощный критерий.
3. Если φ — наиболее мощный критерий размера α , то $\varphi \in \Phi$ (Необходимость).

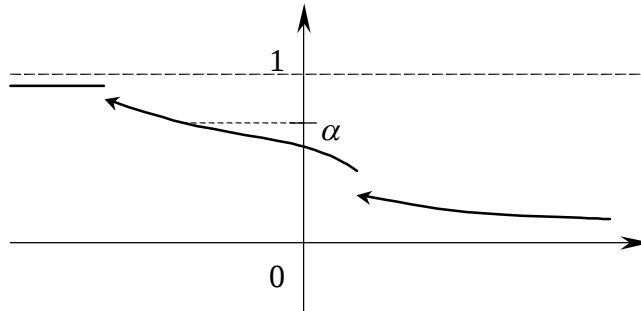
Доказательство. 1. Введём функцию

$$\alpha(c) = \mathbf{P}_{\theta_0} \left(\frac{L(X, \theta_1)}{L(X, \theta_0)} > c \right).$$

$\alpha(c)$ монотонно не возрастает, непрерывна справа и $\alpha(c) \xrightarrow{c \rightarrow -\infty} 1, \alpha(c) \xrightarrow{c \rightarrow +\infty} 0$.

Возможны два случая:

- a) Существует такое $c = K_\alpha : \alpha(K_\alpha) = \alpha$.



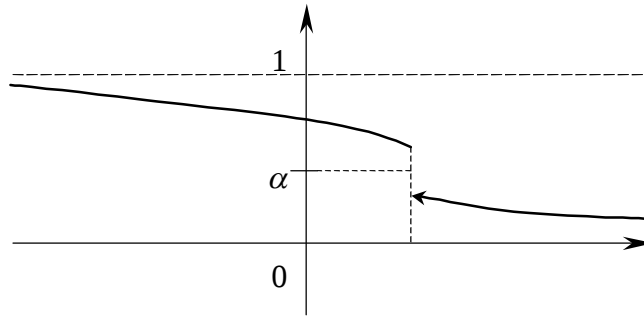
Тогда положим

$$\varphi(X) = \begin{cases} 1, & \frac{L(X, \theta_1)}{L(X, \theta_0)} > K_\alpha, \\ 0, & \frac{L(X, \theta_1)}{L(X, \theta_0)} \leq K_\alpha. \end{cases}$$

Очевидно, $\varphi(X) \in \Phi$ и

$$\mathbf{E}_{\theta_0} \varphi(X) = 1 \cdot \mathbf{P}_{\theta_0} \left(\frac{L(X, \theta_1)}{L(X, \theta_0)} > K_\alpha \right) = \alpha.$$

- b) Существует K_α такое, что $\alpha(K_\alpha) < \alpha < \alpha(K_\alpha - 0)$.



В этом случае положим

$$\varphi(X) = \begin{cases} 1, & \frac{L(X, \theta_1)}{L(X, \theta_0)} > K_\alpha, \\ \gamma_\alpha, & \frac{L(X, \theta_1)}{L(X, \theta_0)} = K_\alpha, \\ 0, & \frac{L(X, \theta_1)}{L(X, \theta_0)} < K_\alpha, \end{cases}$$

где

$$\gamma_\alpha = \frac{\alpha - \alpha(K_\alpha)}{\alpha(K_\alpha - 0) - \alpha(K_\alpha)}.$$

Очевидно, $0 < \gamma_\alpha < 1$ и

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\theta_0} \varphi(X) &= 1 \cdot \mathbf{P}_{\theta_0} \left(\frac{L(X, \theta_1)}{L(X, \theta_0)} > K_\alpha \right) + \gamma_\alpha \mathbf{P}_{\theta_0} \left(\frac{L(X, \theta_1)}{L(X, \theta_0)} = K_\alpha \right) = \\ &= \alpha(K_\alpha) + \frac{\alpha - \alpha(K_\alpha)}{\alpha(K_\alpha - 0) - \alpha(K_\alpha)} \cdot (\alpha(K_\alpha - 0) - \alpha(K_\alpha)) = \alpha. \end{aligned}$$

Попутно доказано (случай b)), что существует функция из класса φ , постоянная на границе (γ_α не зависит от X).

2. и 3. Пусть $\varphi \in \Phi$ — критерий размера α . Пусть φ^* — какой-либо другой критерий размера α . Покажем, что $\varphi^* \in \Phi$. Для этого рассмотрим функцию

$$(\varphi(X) - \varphi^*(X))(L(X, \theta_1) - K_\alpha L(X, \theta_0))$$

и интеграл от неё

$$\int_{\mathbf{R}^n} (\varphi(X) - \varphi^*(X))(L(X, \theta_1) - K_\alpha L(X, \theta_0)) \mu(dx).$$

Разобьём множество, на котором подынтегральная функция равна нулю на две части:

$$\begin{aligned} A &= \{x : L(x, \theta_1) = K_\alpha L(x, \theta_0)\}, \\ B &= \{x : \varphi(x) = \varphi^*(x)\}. \end{aligned}$$

Имеем

$$\int_{\mathbf{R}^n \setminus A} (\varphi(X) - \varphi^*(X))(L(X, \theta_1) - K_\alpha L(X, \theta_0)) \mu(dx) \geq 0.$$

Рассмотрим значения $x : L(x, \theta_1) - K_\alpha L(x, \theta_0) > 0$. При этом $\varphi = 1$, $\varphi^* \leq 1 \Rightarrow \varphi - \varphi^* \geq 0$ и подынтегральная функция неотрицательна. При $x : L(x, \theta_1) - K_\alpha L(x, \theta_0) < 0$, очевидно, $\varphi = 0$, $\varphi^* \geq 0 \Rightarrow \varphi - \varphi^* \leq 0$ и подынтегральная функция снова неотрицательна. При этом

$$\int_{\mathbf{R}^n \setminus A \setminus B} (\varphi(X) - \varphi^*(X)) (L(X, \theta_1) - K_\alpha L(X, \theta_0)) \mu(dx) > 0,$$

следовательно, возможно $\varphi(X) = \varphi^*(X)$ почти всюду, возможно их различия сосредоточены на границе. Поскольку класс Φ допускает любые значения на границе, $\varphi^* \in \Phi$.

Пусть теперь $\varphi^* \notin \Phi (>)$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^n} (\varphi(X) - \varphi^*(X)) (L(X, \theta_1) - K_\alpha L(X, \theta_0)) \mu(dx) &\stackrel{(>)}{\geq} 0 \Leftrightarrow \\ \int_{\mathbf{R}^n} (\varphi(X) - \varphi^*(X)) L(X, \theta_1) \mu(dx) - K_\alpha \underbrace{\int_{\mathbf{R}^n} (\varphi(X) - \varphi^*(X)) L(X, \theta_0) \mu(dx)}_{\substack{= \mathbf{E}_{\theta_0} \varphi(X) - \mathbf{E}_{\theta_0} \varphi^*(X) = 0 \\ = \alpha - \alpha}} &\stackrel{(>)}{\geq} 0 \Rightarrow \\ \underbrace{\int_{\mathbf{R}^n} \varphi(X) L(X, \theta_1) \mu(dx)}_{= \beta(\theta_1) - \mathbf{E}_{\theta_1} \varphi(X)} &\stackrel{(>)}{\geq} \underbrace{\int_{\mathbf{R}^n} \varphi^*(X) L(X, \theta_1) \mu(dx)}_{= \beta^*(\theta_1) - \mathbf{E}_{\theta_1} \varphi^*(X)} \Leftrightarrow \beta(\theta_1) \stackrel{(>)}{\geq} \beta^*(\theta_1) \end{aligned}$$

и из того, что $\varphi^* \notin \Phi$ следует, что φ^* не является наиболее мощным.

Лемма доказана.

Практическая ценность результатов леммы Неймана-Пирсона незначительна. Формально она касается только случаев простых основной и альтернативной гипотез, чего на практике не бывает. Но, как мы увидим в примерах, эта лемма позволяет иногда решить задачу и для сложных гипотез (обычно односторонних).

Пример. $X_1, \dots, X_n \sim \text{Pois}(\theta)$, требуется построить критерий размера α для проверки следующих гипотез: $H_0: \theta = \theta_0$; $H_1: \theta = \theta_1 < \theta_0$. Построим его, исходя из леммы Неймана-Пирсона:

$$\varphi(X) = \begin{cases} 1, & \frac{L(X, \theta_1)}{L(X, \theta_0)} > K_\alpha, \\ \gamma_\alpha, & \frac{L(X, \theta_1)}{L(X, \theta_0)} = K_\alpha, \quad \mathbf{E}_{\theta_0} \varphi(X) = \alpha, \\ 0, & \frac{L(X, \theta_1)}{L(X, \theta_0)} < K_\alpha, \end{cases}$$

Функция правдоподобия в данном случае принимает вид

$$L(X, \theta) = e^{-n\theta} \frac{\theta^{\sum_{i=1}^n X_i}}{X_1! \dots X_n!}.$$

Таким образом, требуется решить неравенство

$$\begin{aligned} \frac{L(X, \theta_1)}{L(X, \theta_0)} = e^{-n(\theta_1 - \theta_0)} \left(\frac{\theta_1}{\theta_0} \right)^{\sum_{i=1}^n X_i} &> K_\alpha \Leftrightarrow -n(\theta_1 - \theta_0) + \sum_{i=1}^n X_i (\ln \theta_1 - \ln \theta_0) > K_\alpha \Leftrightarrow \\ \sum_{i=1}^n X_i (\ln \theta_1 - \ln \theta_0) > K_\alpha &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n X_i < K_\alpha. \end{aligned}$$

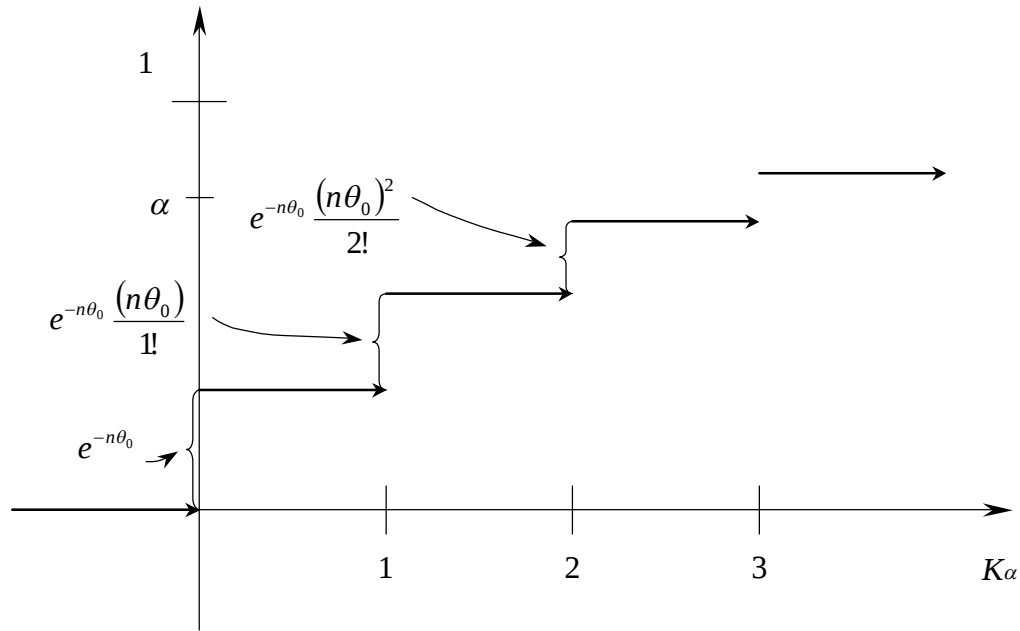
Итак, критерием является функция

$$\varphi(X) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^n X_i > K_\alpha, \\ \gamma_\alpha, & \sum_{i=1}^n X_i = K_\alpha, \\ 0, & \sum_{i=1}^n X_i < K_\alpha, \end{cases} \quad \mathbf{E}_{\theta_0} \varphi(X) = \mathbf{P}_{\theta_0} \left(\sum_{i=1}^n X_i < K_\alpha \right) + \gamma_\alpha \mathbf{P}_{\theta_0} \left(\sum_{i=1}^n X_i = K_\alpha \right) = \alpha.$$

Остаётся определить γ_α . Гипотезы приобретают при этом следующий вид:

$$H_0 : \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Pois}(n\theta_0), \quad H_1 : \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Pois}(n\theta_1).$$

Функция распределения при $\theta = \theta_0$ выглядит так:



Возможны два случая:

1. $\exists m : \sum_{j=0}^m e^{-n\theta_0} \frac{(n\theta_0)^j}{j!} = \alpha$. В этом случае полагаем $K_\alpha = m + 1$ и $\gamma_\alpha = 0$.
2. $\exists m : \sum_{j=0}^m e^{-n\theta_0} \frac{(n\theta_0)^j}{j!} < \alpha < \sum_{j=0}^{m+1} e^{-n\theta_0} \frac{(n\theta_0)^j}{j!}$. В этом случае снова полагаем $K_\alpha = m + 1$, а

$$\gamma_\alpha = \frac{\alpha - \sum_{j=0}^m e^{-n\theta_0} \frac{(n\theta_0)^j}{j!}}{e^{-n\theta_0} \frac{(n\theta_0)^{m+1}}{(m+1)!}}.$$

Критерий построен.

Заметим, что критическая функция не зависит от конкретной альтернативы, а размер критерия достигается на основной гипотезе $\theta = \theta_0$. Таким образом, фактически решена более общая задача построения равномерно наиболее общего критерия для проверки сложных гипотез:

$$H_0: \theta \geq \theta_0 \text{ и } H_1: \theta < \theta_0.$$